

# Problem Set 10: 数学归纳法与递归结构

(提交截止时间: 4 月 1 日 10:00)

## Problem 1

试给出以下集合的递归定义:

- (a) 正奇数集合;
- (b) 整系数多项式的集合;
- (c) 3 的正整数次幂的集合.

## Problem 2

用数学归纳法证明: 当  $n$  为非负整数时  $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$  可被 9 整除.

## Problem 3

用数学归纳法证明: 平面上过同一点的  $n$  条直线必将平面分为  $2n$  个区域.

## Problem 4

正整数  $n$  的拆分是把  $n$  写成正整数之和的方式. 例如,  $7 = 3 + 2 + 1 + 1$  是 7 的拆分. 设  $P_m$  等于  $m$  的不同拆分方式的计数, 即拆分数 (和式中各项的顺序无关紧要); 设  $P_{m,n}$  是用不大于  $n$  ( $1 \leq n \leq m$ ) 的正整数的和表示  $m$  的不同方式的计数.

- (a) 证明:  $P_{m,m} = P_m$ ;

(b) 证明: 下面的  $P_{m,n}$  的递归定义是正确的;

$$P_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = 1 \\ 1 & n = 1 \\ P_{m,m} & m < n \\ 1 + P_{m,m-1} & m = n > 1 \\ P_{m,n-1} + P_{m-n,n} & m > n > 1 \end{cases}$$

c) 根据此递归定义求出 5 和 6 的拆分数.

## Problem 5

试证明: 当  $n$  是正整数时, 有  $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ , 其中  $f_n$  表示第  $n$  个斐波那契数.

## Problem 6

试证明算术基本定理: 每个大于 1 的自然数, 要么本身就是质数, 要么可以写为 2 个或以上的质数的积, 且这些质因子按大小排列之后, 仅有唯一的表示.

## Problem 7

设  $S$  是一个正整数集合, 定义如下:

基础步骤:  $1 \in S$ .

归纳步骤: 如果  $n \in S$ , 则  $3n + 2 \in S$  且  $n^2 \in S$ .

(a) 证明: 如果  $n \in S$ , 则  $n \equiv 1 \pmod{4}$ ;

(b) 证明: 存在正整数  $m \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $m \notin S$ .

## Problem 8

试证明: 在任意长度有限的 0/1 序列中, 字符串 01 至多比字符串 10 多出现 1 次.

## Problem 9

试写出当  $n$  和  $m$  都是正整数时  $n! \bmod m$  的递归公式.

## Problem 10

试证明：对于任意正整数  $n$ ，一定存在  $1, 2, \dots, n$  的一个排列，使得在排列中这些数任何两个数的平均值都不会出现在这两个数之间.